Développer, factoriser, identités remarquables

Le calcul littéral, c'est l'art de manipuler des expressions (des formules mathématiques) afin de les simplifier ou de mieux les utiliser.

I - Développer une expression

Développer c'est supprimer les parenthèses pour arriver à une somme algébrique.

1°) Simple distributivité

Énoncé

Développe : $A=3(x+7)$

Correction

A = $3(x+7)$

A = $3 \times (x+7)$

A = $3 \times x + 3 \times 7$

A = $3x + 21$

Énoncé

Développe : $C=-3{,}5(x-2)$

Correction

$C=-3{,}5(x-2)$

$C=-3{,}5\times(x-2)$

$C=(-3{,}5)\times x+(-3{,}5)\times(-2)$

$C=-3{,}5\,x+7$

2°) Double distributivité

Propriété de la double distributivité

Pour tous nombres relatifs a, b, c et d :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Énoncé

Développe et simplifie l'expression suivante :

D = $(3x + 1)(y + 4)$.

Correction

D = $(3x + 1)(y + 4)$.

D = $3x \times y + 3x \times 4 + 1 \times y + 1 \times 4$

D = $3xy + 12x + y + 4$

Énoncé

Développe et simplifie l'expression suivante :

E = $(3x - 1)(y - 4)$.

Correction

D = $(3x - 1)(y - 4)$.

D = $3x \times y + 3x \times (-4) - 1 \times y - 1 \times (-4)$

D = $3xy - 12x - y + 4$

→ Exercices 16 page 106 ; 32, 36 et 37 page 107

II - Factoriser une expression

Factoriser c'est transformer l'expression pour obtenir un produit.
On utilise la formule de la distributivité « à l'envers » : le nombre qui multipliera la parenthèses s'appelle le facteur commun.

Le facteur commun peut avoir plusieurs formes : un nombre en écriture décimale, en écriture fractionnaire, sous forme d'une lettre ; une expression littérale.

Énoncé
Factorise : $E = 14a - 7b$

Correction
$E = 14a - 7b$
$E = 7 \times 2a - 7 \times b$
$E = 7 \times (2a - b)$

Énoncé
Factorise : $F = -x^2 + 3x$.

Correction
$F = -x^2 + 3x$.
$F = (-x) \times x + 3 \times x$
$F = x(-x + 3)$

Énoncé
Factorise :
$D = (9x - 4)(5x + 6) + (9x - 4)(3x + 11)$.

Correction
$D = (9x - 4)(5x + 6) + (9x - 4)(3x + 11)$.
$D = (9x - 4)(5x + 6) + (9x - 4)(3x + 11)$
$D = (9x - 4)[(5x + 6) + (3x + 11)]$
$D = (9x - 4)[5x + 6 + 3x + 11]$
$D = (9x - 4)(8x + 17)$

Énoncé
Factorise :
$D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$.

Correction
$D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$.
$D = (9x - 4)(5x + 6) - (9x - 4)(3x + 11)$
$D = (9x - 4)[(5x + 6) - (3x + 11)]$
$D = (9x - 4)[5x + 6 - 3x - 11]$
$D = (9x - 4)(2x - 5)$

→ Exercices 6, 12 et 13 page 105

III - Identités remarquables

1°) Développer avec une identité remarquable

Formules à connaître par cœur :

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ rappel : (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)

à gauche du = on parle de la forme factorisée,
à droite du = on parle de la forme développée.

Exemples :

a) $(3n + 5)^2 = (\ldots)^2 + 2 \times \ldots \times \ldots + (\ldots)^2$
$= (3n)^2 + 2 \times 3n \times 5 + 5^2$
$= 9n^2 + 30n + 25$

b) $(3n - 5)^2 = (\dots)^2 - 2 \times \dots \times \dots + (\dots)^2$
$= (3n)^2 - 2 \times 3n \times 5 + 5^2$
$= 9n^2 - 30n + 25$

c) $(3n - 5)(3n + 5) = (\dots)^2 - (\dots)^2$
$= (3n)^2 - 5^2$
$= 9n^2 - 25$

→ Exercices 42, 43, 44 et 45 page 108

2°) Factoriser avec une identité remarquable

On utilise les identités remarquables « à l'envers » :

$$a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2 \times a \times b + b^2 = (a-b)^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Exemples :

> Factoriser

$25x^2 + 30x + 9$ ça ressemble à la 1ere formule
$= (\dots)^2 + 2 \times \dots \times \dots + (\dots)^2$ voici le squelette de la 1ere formule, essayons de le remplir
$= (5x)^2 + 2 \times \dots \times \dots + (3)^2$ on commence par les carrés
$= (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + (3)^2$ puis on vérifie au centre : $2 \times 5x \times 3 = 30x$ c'est bon
$= (5x+3)^2$ et on utilise la 1ere formule à l'envers

> Factoriser

$9x^2 - 24x + 16$ c'est la 2eme formule
$= (\dots)^2 - 2 \times \dots \times \dots + (\dots)^2$
$= (3x)^2 - 2 \times \dots \times \dots + (4)^2$
$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + (4)^2$
$= (3x-4)^2$

> Factoriser

$16x^2 - 64$ c'est la 3eme formule
$= (\dots)^2 - (\dots)^2$
$= (4x)^2 - (8)^2$
$= (4x+8)(4x-8)$

Aide : table des carrés

1 x 1 = 1	5 x 5 = 25	9 x 9 = 81	13 x 13 = 169
2 x 2 = 4	6 x 6 = 36	10 x 10 = 100	14 x 14 = 196
3 x 3 = 9	7 x 7 = 49	11 x 11 = 121	15 x 15 = 225
4 x 4 = 16	8 x 8 = 64	12 x12 = 144	16 x 16 = 256

→ Exercices 48 et 49 page 109