

I - La division euclidienne

Rappel : nombre entier naturel = « positif sans virgule »

On considère un nombre entier naturel a et un nombre entier non nul b .

| | | |
|-----|-----|---|
| a | b | Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver les deux entiers q et r tels que : $a = b \times q + r$ avec $r < b$. |
| r | q | |
| | | |

q s'appelle le quotient (entier).
 r s'appelle le reste de la division euclidienne

Remarque : le couple $(q ; r)$ est unique.

Exemple 1 : Effectuer la division euclidienne de 183 par 12.

| | | |
|------------|-----------|--|
| 183 | 12 | On peut donc écrire : $183 = 12 \times 15 + 3$ avec $3 < 12$. |
| 63 | 15 | |
| 3 | | |

Exemple 2 : On donne $278 = 6 \times 45 + 8$: quelle(s) division(s) euclidienne(s) cette égalité représente-t-elle ?

Le reste doit être plus petit que le quotient.

$8 < 45$ donc cette égalité représente la division euclidienne de 278 par 45.

$8 > 6$ donc cette égalité ne représente pas la division euclidienne de 278 par 6.

Exercice 2, 3, 4 page 74

Exercice 17 page 75

II - Vocabulaire, critères de divisibilité

Définition :

Quand le reste de la division euclidienne de a par b est nul (donc quand $r = 0$), on dit :

b **divise** a

b est un **diviseur** de a

a est un **multiple** de b

a est **divisible** par b .

Exercice 21 page 75

Exercice 24 page 75

Exercice 25 page 75

Pour savoir à l'avance si le reste d'une division est nul, on utilise les critères de divisibilité :

| |
|---|
| Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. |
| Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5. |
| Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses « chiffres » est un multiple de 3. |

Exemple 1 : le nombre 3054

3054 est divisible par 2 car son chiffre des unités est parmi 0, 2, 4, 6, ou 8.

3054 n'est pas divisible par 5 car son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5.

3054 est divisible par 3 car $3+0+5+4 = 12$ qui est un multiple de 3.

Exemple 2 : le nombre 215

215 n'est pas divisible par 2 car son chiffre des unités n'est pas 0,2,4,6 ou 8.

215 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.

215 n'est pas divisible par 3 car $2+1+5 = 8$ n'est pas un multiple de 3.

Exercices 43, 44 page 76

III - Utilisation

1°) Nombre premier

Définition : un nombre premier est un nombre entier naturel qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier.

Les 10 premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

Propriété :

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples :

60 se décompose en $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$. On notera $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

54 se décompose en $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$. On notera $54 = 2 \times 3^3$

(rappel : 2^2 et 3^3 sont des puissances, voir cours de 4eme, page 55 du manuel si besoin)

2°) Méthode de décomposition

Exemple avec le nombre 4680

On passe en revue les critères de divisibilité : par 2, par 5, par 3, ...

Par 2 : $4680 = 2 \times 2340$

$$2340 = 2 \times 1170$$

$$1170 = 2 \times 585 \text{ et } 585 \text{ n'est pas divisible par } 2.$$

Par 5 : $585 = 5 \times 117$ et 117 n'est pas divisible par 5.

Par 3 : $117 = 3 \times 39$

$$39 = 3 \times 13$$

et 13 est un nombre premier.

Bilan : $4680 = 2^3 \times 5 \times 3^2 \times 13$

Exercice 50 page 77

Exercice 55 page 77

3°) Simplifier une fraction

Rappel : $\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$ on a simplifié la fraction $\frac{4}{6}$ pour obtenir $\frac{2}{3}$

Exemple plus complexe : simplifier la fraction $\frac{280}{448}$

on décompose : $280 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^3 \times 5 \times 7$

$$448 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^6 \times 7$$

$$\text{d'où : } \frac{280}{448} = \frac{2^3 \times 5 \times 7}{2^6 \times 7} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$

Exercice 58 page 77

Pour aller plus loin

Exercice 12 page 79 ; exercice 13 page 79 ; exercice 6 page 79 ; exercice 2 page 78