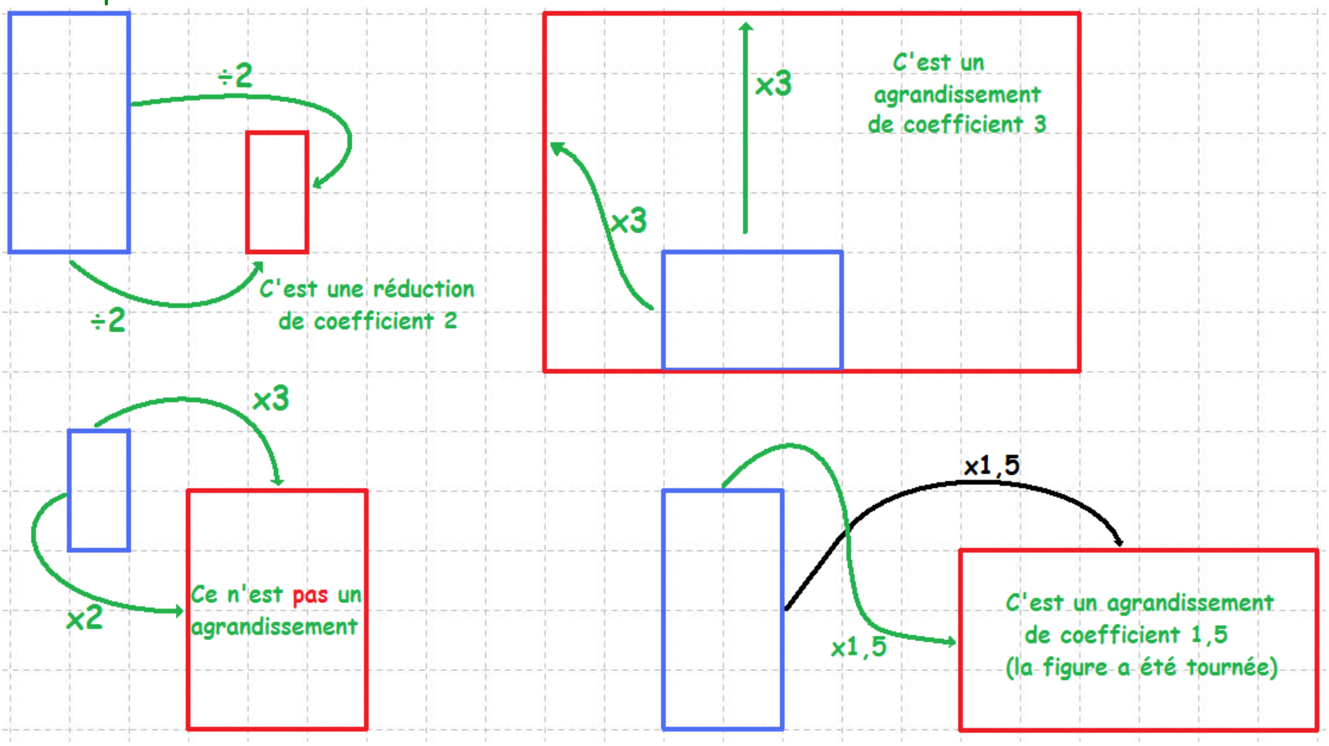
Propriété de Thalès et sa réciproque

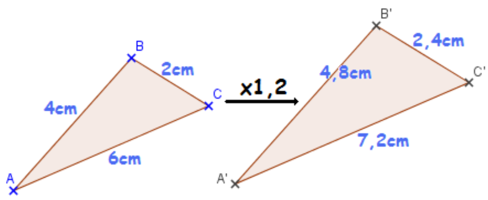
I – Agrandissement, réduction

1°) Définition

Une figure est une réduction (un modèle réduit) d'une autre figure si pour passer de l'une à l'autre toutes les longueurs sont divisées par un même nombre. Ce nombre est appelé coefficient de réduction.
Dans le cas d'un agrandissement, on parle du coefficient d'agrandissement.

Exemples :





C'est un agrandissement de coefficient 1,2

2°) Échelle

Le coefficient de réduction (ou d'agrandissement) est aussi appelé échelle.

On peut calculer l'échelle facilement à partir de n'importe quel côté :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur la figure d'arrivée}}{\text{longueur sur la figure de départ}}$$

Exemple : pour le triangle de l'exemple précédent, on calcule

$$\text{échelle} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{4{,}8}{4} = 1{,}2$$

→ Exercices 18 et 19 page 301

→ Exercice 1 de la fiche

3°) Propriétés d'un agrandissement/réduction

Remarque importante :

- Si l'échelle est supérieure à 1, on a un agrandissement.
- Si l'échelle est inférieure à 1, on a une réduction.

(si l'échelle vaut 1, on a une copie)

Lors d'un agrandissement ou d'une réduction d'échelle k :

- les longueurs sont multipliées par k
- les surfaces sont multipliées par k^2 (dimension 2)
- les volumes sont multipliés par k^3 (dimension 3)
- les angles sont conservés (leur mesure ne change pas)
- les milieux sont conservés.

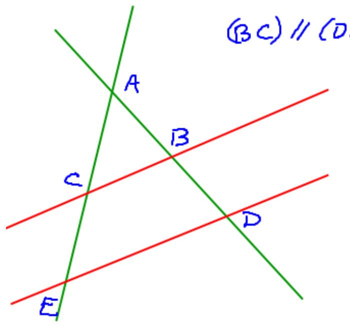
→ Exercice 2 de la fiche

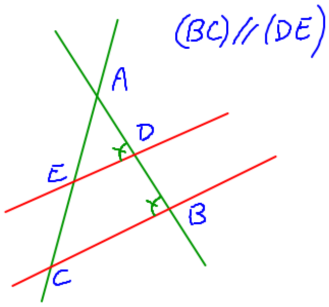
→ Exercice 20 page 301

II - Propriété de Thalès

1°) Énoncé

Si deux droites sécantes sont coupées par deux droites parallèles, alors les deux triangles formés sont proportionnels (l'un est une réduction de l'autre).





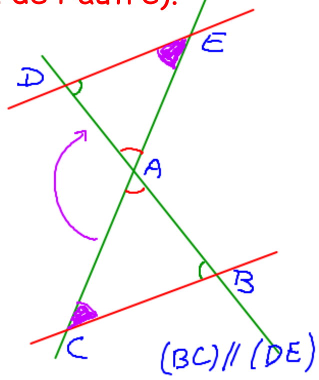


Fig 1 : ABC est une réduction de ADE

Fig 2 : ABC est un agrandissement de ADE

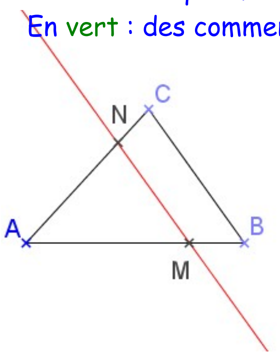
Fig 3 : ABC et ADE sont proportionnels, avec un retournement.

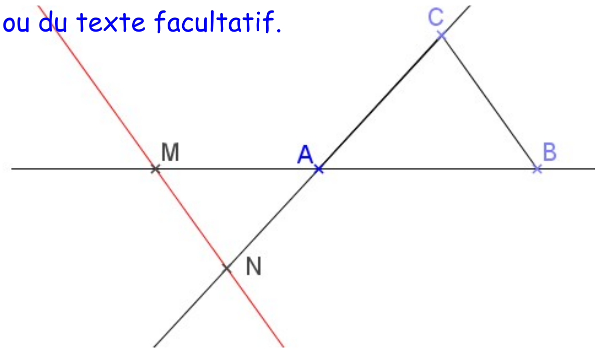
Dans tous ces cas $Echelle = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

2°) Utilisation (apprendre par cœur cette rédaction)

En bleu : ce qu'il faut écrire.

En vert : des commentaires ou du texte facultatif.





AM = 6cm

AB = 8cm

BC = 6cm

(MN) // (BC)

Calculer MN.

Ce qui suit est valable pour les deux figures.

On sait que les droites sont parallèles : (MN) // (BC), et que les points A,M,B et A,N,C sont alignés dans le même ordre. (utile pour la réciproque)

D'après la propriété de Thalès, le triangle AMN est une réduction de ABC

Échelle = $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ on remplace $\frac{AN}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{MN}{6}$

Si $\frac{6}{8} = \frac{MN}{6}$ alors 8 x MN = 6 x 6 (produit en croix)

$\frac{8 \times MN}{8} = \frac{6 \times 6}{8}$ (on a divisé par 8 des deux côtés)

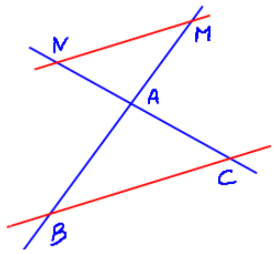
MN = $\frac{6 \times 6}{8}$ = 4,5 cm.

→ Exercices 3, 4, 6, 10, 13 pages 299-300

III - Réciproque de la propriété de Thalès

La réciproque va utiliser des longueurs pour prouver que deux droites sont parallèles.

1°) Rédaction de la réciproque (apprendre par cœur cette rédaction)



Dans cette figure, on donne AN = 6 cm AM = 8 cm
AB = 12 cm AC = 9 cm

On veut savoir si (MN) et (BC) sont parallèles.

En bleu le texte obligatoire. En vert des commentaires ou des explications.

Si les droites étaient parallèles, on écrirait $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

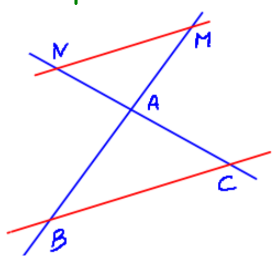
Pour la réciproque, on vérifie si l'égalité est vraie ou non.
Attention à bien séparer les calculs. On simplifie les fractions pour pouvoir les comparer.

D'une part :	D'autre part :
$\frac{AM}{AB}=\frac{8}{12}=\frac{4\times2}{4\times3}=\frac{2}{3}$	$\frac{AN}{AC}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

On a $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ avec les points A,M,B et A,N,C alignés dans le même ordre (l'ordre est important, se souvenir des figures au tableau).
D'après la réciproque de la propriété de Thalès,
les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

2°) Et si les fractions sont différentes ?

On dit qu'on utilise alors la contraposée de la propriété. La rédaction est la même et la conclusion est que les droites ne sont pas parallèles (elles sont sécantes).
Exemple :



AN = 4cm AC=5cm AM = 5cm AB = 6cm
Montrez que les droites (MN) et (BC) sont sécantes.

D'une part	D'autre part
$\frac{AN}{AC}=\frac{4}{5}$	$\frac{AM}{AB}=\frac{5}{6}$

Comme $\frac{AN}{AC} \neq \frac{AM}{AB}$ d'après la contraposée de la propriété de Thalès
(MN) et (BC) sont sécantes (c'est à dire non parallèles).

→ Exercices 15, 16 et 17 page 300

Pour aller plus loin :
→ Exercices 2, 4, 6 page 304 et 18 page 307