

Réciproque du théorème de Pythagore

I - « Réciproque » : définition

Une démonstration mathématique se fait en utilisant des propriétés. Une propriété est une affirmation toujours vraie : il n'y a pas d'exception comme en français.

Une propriété est souvent de la forme « SI ... ALORS ... ».

La partie « SI ... » correspond aux conditions à remplir pour utiliser la propriété. On appelle ça les hypothèses.

La partie « ALORS ... » correspond au résultat (une information) obtenu par la propriété. On appelle ça la conclusion.

Exemple 1 : « SI j'ai un chat ALORS j'ai un animal »

Si Sarah a un chat (l'hypothèse est vérifiée), alors je peux dire que Sarah possède un animal (la conclusion est obtenue).

Exemple 2 : « SI mon triangle est rectangle ALORS je peux utiliser Pythagore »

Si on travaille sur un triangle rectangle (l'hypothèse est vérifiée), alors je peux écrire l'égalité de Pythagore entre les côtés (la conclusion est obtenue).

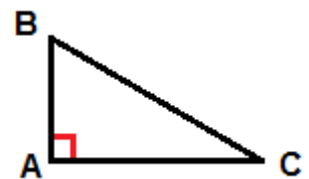
La réciproque d'une propriété (ou d'un théorème) s'obtient en inversant les hypothèses et la conclusion. L'affirmation obtenue n'est pas toujours valable : si on reprend l'exemple 1, dire « SI j'ai un animal ALORS j'ai un chat » est une erreur.

Pour les mathématiques du collège, la plupart des réciproques fonctionnent.

II - Fonctionnement de la réciproque de Pythagore

1°) Fonctionnement

Le théorème de Pythagore fournit une égalité entre les carrés des côtés d'un triangle. Mais ce théorème ne fonctionne que si le triangle est rectangle :



SI le triangle est rectangle, ALORS je peux écrire la formule de Pythagore.

SI le triangle ABC est rectangle en A, ALORS je peux écrire $BC^2 = AB^2 + AC^2$

La réciproque du théorème de Pythagore fonctionne :

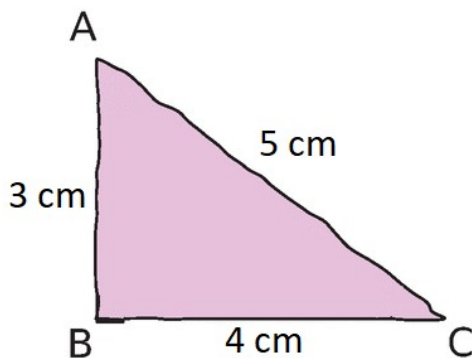
SI je peux écrire $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ALORS le triangle ABC est rectangle en A.

Par ailleurs, si l'égalité de Pythagore ne fonctionne pas, on peut même affirmer que le triangle n'est pas rectangle (ce procédé s'appelle « la contraposée du théorème de Pythagore »).

2°) Exemples de rédaction

■ Prouver qu'un triangle est rectangle

Le triangle ABC ci-dessous est-il un triangle rectangle ?



Correction

Le triangle ABC est-il rectangle ?

$$AB^2 = AB \times AB = 3 \times 3 = 9$$

$$AC^2 = AC \times AC = 5 \times 5 = 25$$

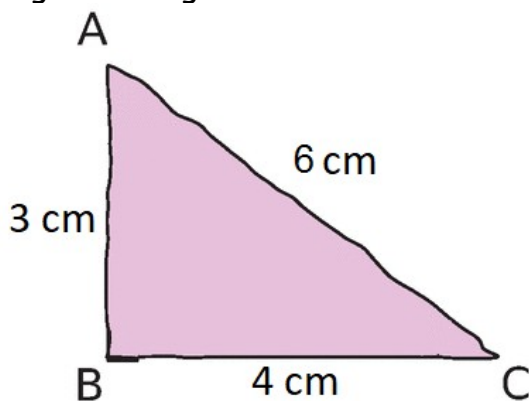
$$BC^2 = BC \times BC = 4 \times 4 = 16$$

les deux petits : $9+16 = 25$ font le grand.

Comme $AB^2 + BC^2 = AC^2$,
d'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle ABC est rectangle en B.

■ Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle

Le triangle ABC ci-dessous est-il un triangle rectangle ?



Correction

Le triangle ABC est-il rectangle ?

$$AB^2 = AB \times AB = 3 \times 3 = 9$$

$$AC^2 = AC \times AC = 6 \times 6 = 36$$

$$BC^2 = BC \times BC = 4 \times 4 = 16$$

les deux petits : $9+16 = 25$ **ne font pas** le grand (36).

D'après la réciproque (contraposée) du théorème de Pythagore, le triangle ABC **n'est pas** un triangle rectangle.

→ Exercices 24, 22, 23 et 26 page 279

→ Exercice 31 page 279

Pour aller plus loin :

Exercice 36 page 289