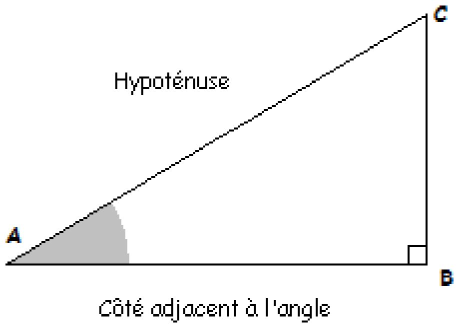
Trigonométrie : calculer les longueurs

I- Introduction

Le triangle rectangle est la figure la plus utilisée en mathématiques, physique, technologie,... On dispose de nombreux outils pour calculer ses caractéristiques (longueurs, angles, surface, ...).
Le théorème de Pythagore permet de calculer une longueur du triangle rectangle.
La trigonométrie permet de calculer une longueur à partir des angles du triangle rectangle.

II - Cosinus

1°) Définition



Dans le triangle ABC rectangle en B, on considère l'angle aigu $\widehat{BAC}$
Le côté [AC] s'appelle l'hypoténuse.
Le côté [AB] s'appelle le côté adjacent de l'angle A.
(adjacent = à côté de)

On constate que le quotient des longueurs $\frac{AB}{AC}$ ne dépend pas de la taille du triangle, mais uniquement de la valeur de l'angle $\widehat{BAC}$
Ce quotient est appelé cosinus, que l'on note « cos » :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\text{côté adjacent de l'angle}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$ **(triangle rectangle uniquement!!)**

c'est un nombre compris entre 0 et 1.

2°) Calculatrice

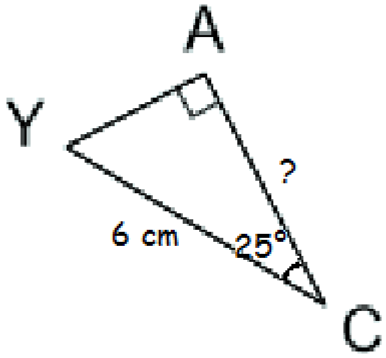
Pour obtenir le cosinus d'un angle on utilise la touche $\boxed{\text{cos}}$ de la calculatrice.

Exemples : cos(0°) = 1 cos(30°) ≈ 0,87 cos(45°) ≈ 0,71
cos(60°) = 0,5 cos(90°) = 0

Remarque : Si le cosinus de 90° ne donne pas 0, alors la calculatrice est mal réglée.

3°) Utilisation : calculer une longueur

Exemple 1 : calculer le côté adjacent



On veut calculer la longueur du côté [AC] de ce triangle :

Comme YAC est un triangle rectangle en A,

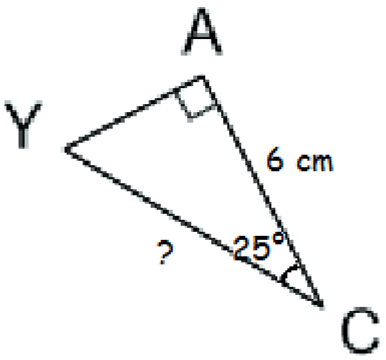
$$\cos(\widehat{C}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{YC}$$

on remplace : $\cos(25°) = \frac{AC}{6}$

et par produit en croix : $AC = 6 \times \cos(25°) \approx 5{,}4\,cm$

Exercice 49 page 281 (rappel : la somme des angles du triangle fait 180°)

Exemple 2 : calculer l'hypoténuse



On veut calculer la longueur de l'hypoténuse [YC] de ce triangle :

Comme YAC est un triangle rectangle en A,

$$\cos(\widehat{C}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{YC}$$

on remplace : $\cos(25°) = \frac{6}{YC}$

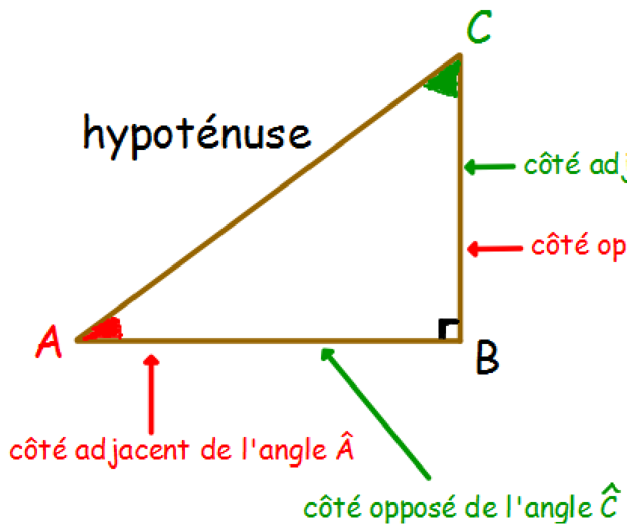
et par produit en croix : $YC = \frac{6}{\cos(25°)} \approx 6{,}6\,cm$

Exercice 44 page 280

III - Sinus et tangente

Il existe des formules similaires au cosinus qui utilisent chaque fois deux des côtés du triangle rectangle.

On utilisera le vocabulaire suivant, qui DEPEND DE L'ANGLE CHOISI :



Exercice 32 et 33 page 279

Les formules sont :

$$cosinus = \frac{adjacent}{hypoténuse} \qquad sinus = \frac{opposé}{hypoténuse} \qquad tangente = \frac{opposé}{adjacent}$$

(moyen mnémotechnique : CAHSOHTOA)

Dans notre exemple, on a donc :

$$\cos(\widehat{A}) = \frac{adjacent\ de\ \widehat{A}}{hypoténuse} = \frac{AB}{AC} \quad \text{et} \quad \cos(\widehat{C}) = \frac{adjacent\ de\ \widehat{C}}{hypoténuse} = \frac{CB}{CA}$$

$$\sin(\widehat{A}) = \frac{opposé\ de\ \widehat{A}}{hypoténuse} = \frac{CB}{CA} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{C}) = \frac{opposé\ de\ \widehat{C}}{hypoténuse} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\widehat{A}) = \frac{opposé\ de\ \widehat{A}}{adjacent\ de\ \widehat{A}} = \frac{CB}{AB} \quad \text{et} \quad \tan(\widehat{C}) = \frac{opposé\ de\ \widehat{C}}{adjacent\ de\ \widehat{C}} = \frac{AB}{CB}$$

Exercice 38 p 280

Exercice 40, 41, 42 page 280

Exercice 48 page 281

Pour aller plus loin :

Exercice 1 page 283

Exercices 8 et 10 page 284

Exercice 16 page 285