

Nombres premiers

I - Notion de diviseur

Rappel : nombre entier naturel = « positif sans virgule »

Quand la division du nombre entier a par le nombre entier b donne un nombre entier, on dit que :

b divise a

b est un diviseur de a

a est un multiple de b

a est divisible par b .

Exemple : $24 \div 6 = 4$. Donc 6 et 4 sont des diviseurs de 24. Tandis que 24 est un multiple de 6 et de 4.

Par contre, $24 \div 7 \approx 3,4...$ donc 7 n'est pas un diviseur de 24.

→ Fiche : exercices 1 à 5

II - Les nombres premiers

1°) Définition

On dit d'un nombre entier naturel qu'il est premier s'il n'a exactement que deux diviseurs : 1 et lui-même. Il s'agit des nombres « qui ne se divisent pas ».

Remarque importante : 1 n'est pas un nombre premier.

Il faut connaître par cœur les 10 plus petits nombres premiers :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

→ Fiche : exercices 6, 7 et 8

III - Utilisation

1°) Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers

Propriété :

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples : 60 se décompose en $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$. On notera $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

54 se décompose en $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$. On notera $54 = 2 \times 3^3$

Remarque importante : pour éviter d'écrire plusieurs fois la même multiplication, les mathématiciens ont inventé la notation de puissance.

Par exemple, au lieu d'écrire $\underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}_{7 \text{ facteurs}}$ on écrit 3^7 .

2°) Algorithme pour faire la décomposition en produit de facteurs premiers

On essaie les divisions par les nombres premiers uniquement (n'oublie pas les critères de divisibilité pour aller plus vite !)

	colonne des diviseurs (uniquement des nombres premiers)
4680	2
2340	2
1170	2
585	5
117	3
39	3
13	13
1	← on arrive à 1, c'est fini

$$\text{Bilan : } 4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 13 = 2^3 \times 5 \times 3^2 \times 13$$

→ Fiche : exercices 9 et 10

3°) Simplifier des fractions

Rappel : $\frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$ on a simplifié la fraction $\frac{4}{6}$ pour obtenir $\frac{2}{3}$

Exemple plus complexe : simplifier la fraction $\frac{280}{448}$

$$\text{on décompose : } 280 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2^3 \times 5 \times 7$$

$$448 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^6 \times 7$$

$$\text{d'où : } \frac{280}{448} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7} = \frac{5}{2 \times 2 \times 2} = \frac{5}{8}$$

→ Fiche : exercices 11 et 12

→ Fiche : exercice 13

Pour aller plus loin

Exercice 14 de la fiche